Prismes et anneaux perfectoides

Dorian Berger
Groupe de travail sur la cohomologie prismatique
LMNO Caen

17 décembre 2019

Ce document présente les notes d'un exposé inscrit dans le cadre d'un groupe de travail sur la cohomologie prismatique, définie dans l'article [BS19] de Bhatt et Scholze. L'objectif est d'introduire la théorie des anneaux perfectoïdes et d'expliquer en quoi les prismes peuvent être vus comme une "déperfection" de ceux-ci.

Les références utilisées pour la première partie sont [Mor17] et [SW18]. Les références utilisées pour la seconde partie sont [BS19] et [Bha18].

Chapitre 1

Anneaux perfectoides entiers

1.1 Définition

Soit p un nombre premier. Tous les monoïdes et anneaux seront supposés commutatifs.

Notation. Dans cet exposé, Φ désignera toujours l'application $x \mapsto x^p$.

Définition 1.1.1. Un anneau perfectoïde entier est un anneau A muni de la topologie ϖ -adique pour un élément régulier $\varpi \in A$ et vérifiant :

- A est ϖ -adiquement complet
- $\varpi^p \mid p$
- $\Phi : A/\varpi \rightarrow A/\varpi^p$ est un isomorphisme

Dans ce cas, ϖ est appelé pseudo-uniformisante perfectoïde de A .

Proposition 1.1.2. Un anneau A muni de la topologie ϖ -adique pour un élément régulier $\varpi \in A$ et vérifiant :

- A est ϖ -adiquement complet
- $\varpi^p \mid p$

est un anneau perfectoïde entier si et seulement si $\Phi : A/p \rightarrow A/p$ est surjectif.

Démonstration. On commence par montrer que, dans ces conditions, $\Phi : A/\varpi \rightarrow A/\varpi^p$ est toujours injectif. Soit $x \in A$ un élément dont la classe modulo ϖ appartient au noyau de Φ . Alors, si on note $|\bullet|_{\varpi}$ la semi-norme engendrant la topologie de $A[1/\varpi]$, on a : $|(x/\varpi)^p|_{\varpi} \leq 1$. On en déduit par multiplicativité de $|\bullet|_{\varpi}$ que $|x/\varpi|_{\varpi} \leq 1$, c'est-à-dire que $\varpi \mid x$.

On suppose maintenant que A est perfectoïde entier. Soit $y \in A$. Par surjectivité de $\Phi : A/\varpi \rightarrow A/\varpi^p$, on peut effectuer successivement des approximations ϖ^p -adiques et écrire :

$$y = x_0^p + \varpi x_1^p + \varpi^{2p} x_2^p + \varpi^{3p} x_3^p + \dots$$

puis :

$$y \equiv (x_0 + \varpi x_1 + \varpi^2 x_2 + \varpi^3 x_3 + \dots)^p \pmod{p}$$

Ce qui assure la surjectivité de $\Phi : A/p \rightarrow A/p$.

Dans le sens réciproque, il suffit d'utiliser $\varpi^p \mid p$. $\square$

On en déduit facilement les deux corollaires suivants :

Corollaire 1.1.3. *Si A est un anneau perfectoïde entier et $\varpi \in A$ est un élément régulier vérifiant :*

- A est ϖ -adiquement complet
- $\varpi^p \mid p$

alors $\Phi : A/\varpi \rightarrow A/\varpi^p$ est un isomorphisme.

Corollaire 1.1.4. *Tout anneau perfectoïde entier de caractéristique p est parfait. Réciproquement, tout anneau de caractéristique p , parfait et ϖ -adiquement complet avec ϖ un élément régulier est un anneau perfectoïde entier.*

Exemple 1.1.5. $\mathbb{Z}_p$ est complet pour la topologie p -adique et vérifie bien $\Phi : \mathbb{Z}_p/p \rightarrow \mathbb{Z}_p/p$ est surjectif. Pour autant, $\mathbb{Z}_p$ n'est pas perfectoïde. En effet, aucun élément $\varpi \in \mathbb{Z}_p$ ne vérifie $\varpi^p \mid p$. Par contre, le complété $\mathbb{Z}_p^{\text{cycl}}$ de la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ est bien un anneau perfectoïde entier.

Pour les mêmes raisons, l'anneau des séries formelles $\mathbb{F}_p[[t]]$ n'est pas perfectoïde mais le complété $\mathbb{F}_p[[t^{1/p^\infty}]]$ de sa clôture intégrale dans $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ l'est.

1.2 Basculement

Proposition 1.2.1. *La construction $A \mapsto \varprojlim_{\Phi} A$ est un foncteur de la catégorie des anneaux topologiques dans celle des monoïdes topologiques vérifiant :*

- $\Phi : \varprojlim_{\Phi} A \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A$ est bijectif.
- $\varprojlim_{\Phi} A \cong \varprojlim_{\Phi} A/\varpi$ si $\varpi \mid p$ et si A est ϖ -adiquement complet.

Démonstration. Tout d'abord, si $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ désigne un élément de $\varprojlim_{\Phi} A$, on a $\Phi(y) = (y_0^p, y_1^p, y_2^p, \dots) = (y_0^p, y_0, y_1, \dots)$. Il est donc clair que $\Phi(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ et Φ est injectif. De même, l'élément $x = (y_1, y_2, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} A$ vérifie $\Phi(x) = (y_1^p, y_2^p, \dots) = (y_0, y_1, y_2, \dots) = y$ et Φ est donc surjectif.

Soient $\varpi \in A$ vérifiant les hypothèses ci-dessus et $(x_n) \in \varprojlim_{\Phi} A/\varpi$. Pour tout n , on choisit $\tilde{x}_n \in A$ un représentant de $x_n \in A/\varpi$. Alors, pour tout m , on a :

$$\tilde{x}_{n+m+1}^p \equiv \tilde{x}_{n+m} \pmod{\varpi}$$

Dont on peut déduire :

$$\tilde{x}_{n+m+1}^{p^{m+1}} \equiv \tilde{x}_{n+m}^{p^m} \pmod{\varpi^{m+1}}$$

Ce qui signifie que la suite $(\tilde{x}_{n+m}^{p^m})_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance ϖ -adique et donc converge. On note sa limite $x^{(n)}$ et on vérifie que la suite $(x^{(n)})$ est bien un élément de $\varprojlim_{\Phi} A$ ainsi qu'un antécédent de (x_n) pour la projection canonique $\varprojlim_{\Phi} A \rightarrow \varprojlim_{\Phi} A/\varpi$. $\square$

On va voir à présent que l'hypothèse « perfectoïde » sur A permet de munir $\varprojlim_{\Phi} A$ d'une structure d'anneau.

Définition 1.2.2. *Soit A un anneau perfectoïde entier. On définit le basculé de A comme la limite $A^{\flat} = \varprojlim_{\Phi} A$ et l'application de débasculement $\sharp : A^{\flat} \rightarrow A$ comme la projection sur la première coordonnée.*

Proposition 1.2.3. *Si $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ et $(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots)$ sont des éléments de $A^{\flat}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(i+n)} + y^{(i+n)})^{p^n}$ existe pour tout i et sera notée $z^{(i)}$. Muni de l'addition donnée par $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) + (y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) = (z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots)$, de la multiplication terme à terme et de la topologie de la limite projective, $A^{\flat}$ est un anneau perfectoïde entier de caractéristique p . De plus, $\sharp : A^{\flat} \rightarrow A$ est continue.*

Remarque. *On notera que $\sharp : A^{\flat} \rightarrow A$ est multiplicative mais n'est généralement pas additive. On notera tout de même que $\sharp \pmod{p} : A^{\flat} \rightarrow A/p$ est bien un morphisme d'anneaux.*

Démonstration. $A^{\flat}$ est un anneau parfait de caractéristique p complet d'après la proposition 1.2.1. Donc, d'après le corollaire 1.1.4, il suffit maintenant de trouver un élément régulier $\varpi^{\flat}$ tel que la topologie de $A^{\flat}$ soit la topologie $\varpi^{\flat}$ -adique. Comme $\Phi : A/\varpi \rightarrow A/\varpi^p$ est surjectif, on dispose d'un élément $(\tilde{\varpi}, \tilde{\varpi}^{1/p}, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} A/\varpi^p$, où $\tilde{\varpi}$ désigne la classe de ϖ modulo ϖ^p . Donc,

via l'isomorphisme de la proposition 1.2.1, on dispose d'un élément $\varpi^{\flat} \in A^{\flat}$ vérifiant $(\varpi^{\flat})^{\sharp} \equiv \varpi \pmod{\varpi^p}$. On peut montrer que $\varpi^{\flat}$ vérifie bien la propriété désirée. $\square$

Remarque. Dans la démonstration, on construit une pseudo-uniformisante perfectoïde $\varpi^b \in A^b$ vérifiant $(\varpi^b)^\sharp \equiv \varpi \pmod{\varpi^p}$. On notera qu'en général, $(\varpi^b)^\sharp \neq \varpi$. En effet, ϖ peut ne pas avoir de racines p -ièmes successives. Le problème peut cependant facilement être contourné : on peut en effet démontrer que ϖ et $(\varpi^b)^\sharp$ sont associés. En pratique, on choisira d'abord une pseudo-uniformisante perfectoïde ϖ^b de A^b puis on posera $\varpi = (\varpi^b)^\sharp$.

Remarque. Il est important de remarquer que si A est un anneau perfectoïde entier de caractéristique p alors $\sharp : A^b \rightarrow A$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques. Dans le cas contraire, $\sharp$ induit tout de même un isomorphisme $A^b/\varpi^b \rightarrow A/\varpi$.

Exemple 1.2.4. En reprenant l'exemple de la section précédente, on a : $(\mathbb{Z}_p^{\text{cycl}})^b \cong \mathbb{F}_p[[t^{1/p^\infty}]]$ avec $(t^{1/p^n})^\sharp = p^{1/p^n}$.

1.3 Application de Fontaine

Notation. Dans la suite, si A est un anneau perfectoïde entier, $W(A^b)$ sera souvent noté $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$.

Théorème 1.3.1. Si A est un anneau perfectoïde entier, il existe un unique morphisme $\theta_A : \mathbb{A}_{\text{inf}}(A) \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\text{inf}}(A) & \xrightarrow{\theta_A} & A \\ \uparrow x \mapsto [x] & \nearrow \sharp & \\ A^b & & \end{array}$$

De plus, θ_A est surjectif et $\ker(\theta_A)$ est engendré par un seul élément régulier $d \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$.

Démonstration. On pose :

$$\theta_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\text{inf}}(A) & \rightarrow & A \\ \sum_{i=0}^{+\infty} [a_i] p^i & \mapsto & \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^\sharp p^i \end{array}$$

et on cherche à démontrer que θ_A est un morphisme d'anneaux. Pour $n \geq 0$, on notera :

$$\text{phant}_n : \begin{array}{ccc} W(A) & \rightarrow & A \\ (a_0, a_1, \dots) & \mapsto & a_0^{p^n} + pa_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n a_n \end{array}$$

la projection sur la n -ième coordonnée de l'application fantôme $\text{phant} : W(A) \rightarrow A^\mathbb{N}$, qui est un morphisme d'anneaux. En remarquant que si $a_i \equiv a'_i \pmod{p}$ alors $p^i a_i^{p^{n-i}} \equiv p^i a'_i^{p^{n-i}} \pmod{p^{n+1}}$, on peut écrire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
W(A) & \xrightarrow{\text{phant}_n} & A \\
\downarrow & & \downarrow \\
W(A/p) & \xrightarrow{\psi} & A/p^{n+1}
\end{array}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
& \psi \circ W(\sharp \pmod{p}) \circ W(\Phi^{-n}) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} [a_i] p^i \right) \\
&= \psi \circ W(\sharp \pmod{p}) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} [a_i^{p^{-n}}] p^i \right) \\
&= \psi \left((a_0^{p^{-n}})^\sharp, (a_1^{p^{1-n}})^\sharp, (a_2^{p^{2-n}})^\sharp, \dots \right) = \sum_{i=0}^n a_i^\sharp p^i \pmod{p^{n+1}} \\
&= \theta_A \left(\sum_{i=0}^{+\infty} [a_i] p^i \right) \pmod{p^{n+1}}
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\theta_A \pmod{p^{n+1}}$ était un morphisme d'anneaux pour tout $n \geq 0$. On en déduit que θ_A est un morphisme d'anneaux car A est p -adiquement complet. De plus, comme $\sharp \pmod{p}$ est surjective, $\theta_A \pmod{p}$ est surjective et de même pour θ_A car A et $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$ sont p -adiquement complets (on peut procéder par approximations p -adiques successives).

Soit ϖ^b une pseudo-uniformisante perfectoïde de A^b et $\varpi = (\varpi^b)^\sharp$ la pseudo-uniformisante perfectoïde de A associée. Comme $\varpi^p \mid p$ et que θ_A est surjective, on dispose de $z \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$ tel que $p = \varpi^p \theta_A(z)$. On pose $d = p - [\varpi^b]^p z \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$. Alors $d \in \ker(\theta_A)$ et est régulier. On montre à présent que $\ker(\theta_A) = (d)$, c'est-à-dire que θ_A induit un isomorphisme $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)/d \rightarrow A$. Or, comme $\theta_A([\varpi^b]) = \varpi$, $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$ est $[\varpi^b]$ -adiquement complet et A est sans ϖ -torsion, il suffit ? de vérifier que θ_A induit un isomorphisme $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)/(d, [\varpi^b]) \rightarrow A/\varpi$. Mais $(d, [\varpi^b]) = (p, [\varpi^b])$ car $d \equiv p \pmod{[\varpi^b]}$ et ce morphisme coïncide donc avec l'isomorphisme $A^b/\varpi^b \rightarrow A/\varpi$ induit par $\sharp$. $\square$

Remarque. *Un élément de $\ker(\theta_A)$ est en fait un générateur si et seulement si il est distingué pour la δ -structure canonique de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(A)$.*

Chapitre 2

Prismes parfaits

2.1 Rappels

On suppose que les résultats de cette section sont connus par le lecteur et sont donc donnés sans démonstration.

Proposition 2.1.1. *Les catégories formées des objets suivants sont équivalentes :*

- 1) δ -anneaux parfaits complets pour la topologie p -adique
- 2) anneaux parfaits modulo p , sans p -torsion et complets pour la topologie p -adique
- 3) anneaux parfaits de caractéristique p

L'équivalence 1) $\rightarrow$ 2) est donnée par le foncteur d'oubli. L'équivalence 2) $\rightarrow$ 3) est donnée par le quotient modulo p . L'équivalence 3) $\rightarrow$ 1) est donnée par $A \mapsto W(A)$.

Lemme 2.1.2. *Soient A un δ -anneau parfait complet pour la topologie p -adique et $d \in A$. Alors d est distingué si et seulement si le coefficient de p dans le développement de Teichmüller de d est inversible.*

Lemme 2.1.3. *Si (A, I) est un prisme, alors $\Phi(I)$ est principal et tous ses générateurs sont distingués.*

2.2 Équivalence entre prismes et perfectoides

Lemme 2.2.1. *Soit A un anneau parfait de caractéristique p dérivé f -complet pour un élément $f \in A$. Alors A est f -complet.*

Démonstration. [Bha18, Lecture IV, Lemma 1.1]

□

Lemme 2.2.2. *Soit (A, I) un prisme parfait. Alors A est complet pour la topologie (p, I) -adique et (A, I) est borné.*

Démonstration. [Bha18, Lecture IV, Lemma 1.2] □

Notation. *Si $\mathcal{P} = (A, I)$ est un prisme, on notera $\tilde{\mathcal{P}} = A/I$. Si R est un anneau perfectoïde entier, on notera $\mathcal{P}_R = (\mathbb{A}_{\text{inf}}(R), \ker(\theta_R))$.*

Théorème 2.2.3. *Les foncteurs $\mathcal{P} \mapsto \tilde{\mathcal{P}}$ et $R \mapsto \mathcal{P}_R$ définissent une équivalence de catégories entre les prismes parfaits et les anneaux perfectoïdes entiers.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que ces foncteurs sont bien définis.

Soit $\mathcal{P} = (A, I)$ un prisme parfait. On montre que $\tilde{\mathcal{P}}$ est bien perfectoïde. Tout d'abord $\Phi : \tilde{\mathcal{P}}/p \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}/p$ est bien surjectif car $\mathcal{P}$ est parfait. D'après le lemme 2.2.2, $\tilde{\mathcal{P}}$ est de p -torsion bornée. Or, $\tilde{\mathcal{P}}$ est dérivé complet pour la topologie p -adique car $\tilde{\mathcal{P}} = \text{coker}(A \rightarrow^d A)$ est le conoyau d'un morphisme de modules dérivé complets. $\tilde{\mathcal{P}}$ est donc complet pour la topologie p -adique. Il reste à trouver une pseudo-uniformisante perfectoïde. Le lemme 2.1.3 assure que $I = (d)$ avec $d \in A$ distingué et la proposition 2.1.1 permet d'écrire $A \cong W(S)$ avec S un anneau parfait de caractéristique p . Sous ce dernier isomorphisme, le lemme 2.1.2 assure que $d = [a_0] + pu$ avec $a_0 \in S$ et $u \in A^*$. Soit $\varpi = [a_0^{1/p}]$, alors $p \equiv -u^{-1}\varpi^p \pmod{d}$ et donc l'image de ϖ^p dans $\tilde{\mathcal{P}}$ divise p . $\tilde{\mathcal{P}}$ est donc bien un anneau perfectoïde entier.

Soit R un anneau perfectoïde entier. Alors $\mathcal{P}_R$ est bien un prisme. En effet, $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R)$ est un δ -anneau, $(d) = \ker(\theta_R)$ définit un diviseur de Cartier sur $\text{Spec}(\mathbb{A}_{\text{inf}}(R))$ car il est principal, $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R)$ est dérivé (p, d) -complet d'après le lemme 2.2.2 et $p \in (d, \Phi(d))$ car d est distingué et p et d appartiennent au radical de Jacobson de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R)$. De plus, $\mathcal{P}_R$ est parfait car $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R)/p \cong R^b$ est parfait.

On montre maintenant que ces foncteurs définissent une équivalence de catégories. Tout d'abord, on a bien $\tilde{\mathcal{P}}_R \cong R$. Il reste à vérifier que $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{P}}}$. Tout d'abord, A/p est complet pour la topologie d -adique d'après le lemme 2.2.1. De plus, comme A/p est parfait, $\Phi : A/(p, d) \rightarrow A/(p, d)$ coïncide avec l'application canonique $A/(p, d^p) \rightarrow A/(p, d)$ dans le sens où on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A/(p, d^p) & & \\ \cong \downarrow & \searrow & \\ A/(p, d) & \xrightarrow{\Phi} & A/(p, d) \end{array}$$

On a donc les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}
A/p &\cong \varprojlim_n A/(p, d^{p^n}) \cong \varprojlim_{\Phi} A/(p, d) \\
&\cong \varprojlim_{\Phi} \tilde{\mathcal{P}}/p \cong \tilde{\mathcal{P}}^b \\
&\cong \mathbb{A}_{\text{inf}}(\tilde{\mathcal{P}})/p
\end{aligned}$$

On en conclut que $A \cong \mathbb{A}_{\text{inf}}(\tilde{\mathcal{P}})$ d'après la proposition 2.1.1. Via cet isomorphisme, on a $\theta_{\tilde{\mathcal{P}}} : A \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ et donc $\ker(\theta_{\tilde{\mathcal{P}}}) \cong I$ et $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{P}}}$. $\square$

Remarque. *En particulier, si R est un anneau perfectoïde entier, $\mathcal{P}_R$ est borné. On peut vérifier que $\mathcal{P}_R$ est cristallin si et seulement si R est de caractéristique p .*

2.3 Perfection d'un prisme

Proposition 2.3.1. *Si (A, I) est un prisme, il existe un prisme parfait $(A, I)_{\text{perf}}$ universel sous (A, I) .*

Démonstration. [BS19, Lemma 3.8] $\square$

Bibliographie

- [Bha18] Bhatt Bhargav. Geometric aspects of p-adic hodge theory, 2018. Eilenberg Lectures at Columbia University.
- [BS19] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Prisms and prismatic cohomology. mai 2019.
- [Mor17] Matthew Morrow. Adic and perfectoid spaces, 2017. Notes de cours à l'Université Paris VI.
- [SW18] Peter Scholze and Jared Weinstein. Lectures on p-adic geometry, 2018. Notes de cours à UC Berkeley.